# محاسبه‌ی نیروی جانبی استاتیکی وارد بر دیوارهای حائل و محل اثر آن در خاک‌های لایه‌ای★

محمود قضاوی[۱]		مسعود مشفق یگانه[۲]

**چکیده** در این مقاله با استفاده از معادلات مبتنی بر نظریه‌ی پلاستیسیته‌ی مواد و بر پایه‌ی روش‌های تعادل حدی، روابطی به‌منظور تخمین نیروی برآیند محرک وارد بر دیوارهای حائل صلب ناشی از خاکریزهای لایه‌ای ارائه می‌گردد. به این منظور با استفاده از معادلات پلاستیسیته‌ی حاکم بر سطوح گسیختگی (معادلات کوتر) و با در نظر گرفتن اثر نیروهای استاتیک فشار عکس‌العمل، نیروی عکس‌العمل خاک ثابت بر روی گوه خاک محاسبه می‌گردد. علاوه بر روش تحلیلی حل، فرم خلاصه جواب برای زاویه‌ی شکست گوه خاک پشت دیوار حائل و در نتیجه فرم خلاصه برای محاسبه‌ی نیروی کل محرک به‌دست آمده است. نتایج به‌دست آمده در این مقاله برای خاکریزهای لایه‌ای نیز بسط داده شده است. با توجه به ایجاد رابطه‌ای برای محاسبه‌ی فشار ناشی از عکس‌العمل خاک از نیروهای ناشی از گوه، به‌صورت ویژه به توضیح قابلیت ویژه‌ی این روش در محاسبه‌ی بازوی نیروی جانبی برآیند به‌صورت تحلیلی در خاکریزهای چندلایه و تک‌لایه بدون در نظر گرفتن فرضیات هندسی پرداخته شده است. نتایج به‌دست آمده از روش حاضر برابری مقدار نیروی برآیند جانبی به‌دست آمده از روش حاضر را با مقدار به‌دست آمده از روش کولمب نشان می دهد. هم‌چنین ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند، وابسته به خصوصیات خاک خاکریز می‌باشد. علاوه بر این نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که در حالت استاتیکی و با فرض مد حرکت چرخش حول پاشنه برای دیوار حائل، مقادیر لنگر به‌دست آمده از روش کولمب در جهت اطمینان و برای طراحی دیوارهای حائل مناسب می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی** دیوار حائل، سطح شکست، حالت فعال، پلاستیسیته، روش تعادل حدی، خاک لایه‌ای.

# Calculation of Static Lateral Thrust and Its Application Point on Rigid Retaining Walls in Layered Backfill

M. Ghazavi		M. Moshfegh Yeganeh

**Abstract** *In this paper, based on soil plasticity and pseudo-static methods, necessary equations have been derived for determination of total active thrusts due to layered backfill on rigid retaining walls using limit equilibrium approach. For this purpose, the reaction force applied on the failed wedge due to granular backfill has been determined using Kotter’s equations. The total lateral thrust and the angle of the failed wedge in the backfill with the horizontal direction has also been computed for both active and passive conditions. In addition, heights of application points of these thrusts have been calculated and compared with those obtained from earlier research work. Moreover, the method has been expanded for layered backfill. The results show that the total resultant thrust obtained from this study is well in accordance with the Coulomb method. In addition, it has been shown that the point of application of the resultant thrust depends on the backfill layering and backfill properties. Moreover, the developed method has shown that for retaining walls rotating sufficiently about their toes, overturning moments computed from the Coulomb method are on the safe side.*

**Key Words** Retaining Wall, Slip Surface, Active Condition, Plasticity, Limit Equilibrium Approach, Layered Backfill.

---

★تاریخ دریافت مقاله ۸۹/۱۲/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۲/۲۶ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول، استاد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی.

(۲) دانشجوی دکتری دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی.

**مقدمه**

محاسبه‌ی فشار جانبی بر روی دیوار حائل از اولین مسائل مهندسی ژئوتکنیک می‌باشد. از تئوری‌های محاسبه‌ی فشار جانبی می‌توان به تئوری کولمب (۱۷۷٦) و رانکین (۱۸۵۷) اشاره نمود که هنوز هم به‌صورت وسیع در محاسبه‌ی فشار جانبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تئوری‌ها به مرور زمان پیشرفت نمود و روش‌های فراوانی برای محاسبه‌ی به‌تر فشار جانبی براساس تئوری‌های رانکین و کولمب پیشنهاد شده است.

تئوری کولمب علی‌رغم توانایی در برآورد نیروی برآیند در خاکریزهای شیبدار و نیز در نظر گرفتن اصطکاک میان دیوار و خاکریز، بر پایه‌ی تعادل نیروها بنا نهاده شده است و توضیحی در مورد توزیع فشار و ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی جانبی وارد بر پشت دیوارهای حائل ارائه نمی‌دهد. در نظر گرفتن فشار به‌صورت خطی در حالت استاتیکی مرسوم می‌باشد.

کایت و کرسیل (۱۹٤۸) [1] با در نظر گرفتن سطح شکست غیرخطی روشی پیشرفته براساس توسعه‌ی معادلات مولر براسلو ارائه نمودند. این روش نیروها را در شرایط حالت حدی محاسبه می‌نمود ولی هیچ توضیحی در مورد توزیع فشار در پشت دیوارهای حائل ارائه نمی‌نمود.

دبروا (۱۹٦۳) [2] با در نظر گرفتن سطح شکست خطی به ارائه‌ی معادلاتی برای تخمین توزیع فشار جانبی در پشت دیوار حائل در مدهای مختلف حرکت پرداخت. در روش مذکور مقاومت برشی بسیج شده خاک به‌صورت تابعی از عمق در نظر گرفته شده است.

اسکولوسکی(۱۹٦۵) [3] با استفاده از روش خطوط مشخصه به محاسبه‌ی روابط میدان‌های تنش در خاک و محاسبه‌ی فشار جانبی پرداخت. در این روش با استفاده از انتگرال گیری بر روی معادلات تنش در میدان پلاستیک، به محاسبه‌ی معادلات میدان تنش در اطراف ناحیه‌ی بارگذاری‌شده پرداخته شده است.

ضرابی کاشانی ۱۹٦۵[4] به حل تحلیلی معادلات کولمب پرداخت و روابطی تحلیلی برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شکست گوه گسیختگی و نیروی جانبی منتجه ارائه نمود.

گریکو (۱۹۹۹) [5] با معرفی روشی تحلیلی نشان داد که در صورت استفاده از روش کولمب و رانکین در شرایط مشابه، نیروی جانبی برآیند به‌صورت یکتا حاصل می‌گردد. او هم‌چنین روشی برای حل مسائل با پیچیدگی‌های بیش‌تر ارائه نمود. با این وجود روش مذکور راه حلی برای محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند ارائه نمی‌نمود.

تعدادی از محققان با استفاده از معادلات دیفرانسیل روش‌هایی را به‌منظور محاسبه‌ی فشار جانبی ارائه نمودند. از این میان می‌توان به روش‌های ارائه شده توسط یانسن (۱۸۹۵) [6]، اسپگلر و هندی (۱۹۸٤) [7] و ونگ (۲۰۰۰) [8] اشاره نمود. البته این روش‌ها دارای فرضیات زیاد بوده و هم‌چنین اطلاعات حاصل از این روش‌ها خام و نیاز به بحث و بررسی بیش‌تر دارند.

در سال‌های اخیر روش‌های متعددی بر پایه‌ی روش قطعات افقی (HSM) ارائه شده است. از این میان می‌توان به پژوهش شاهقلی و فاخر (۲۰۰۱) [9] و پژوهش احمدآبادی و قنبری (۲۰۰۹) [10] در خاک‌های اصطکاکی- چسبنده اشاره نمود. روش‌های قطعات افقی موفقیت‌هایی در زمینه‌ی محاسبه‌ی اندازه و توزیع فشار جانبی وارد بر دیوارهای حائل داشته‌اند ولی به دلیل معادلات پیچیده و فرضیات زیاد، کم‌تر در موارد کاربردی مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

به‌علت اهمیت محاسبه‌ی نیروی برآیند جانبی و هم‌چنین ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند جانبی به موازات پیشرفت روش‌های تحلیلی، مطالعات تجربی به‌منظور بررسی صحت روش‌های تحلیلی انجام پذیرفته است. تعدادی از این مطالعات صحت مقدار نیروی جانبی محاسبه شده از تئوری کولمب را تأیید

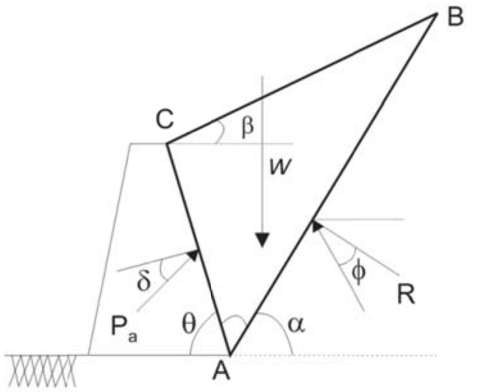
نموده‌اند ولی در نظر گرفتن توزیع فشار به‌صورت خطی را مورد تردید قرار داده‌اند [11]، [12]. برای نمونه ماتسو (۱۹۷۸) [11] با استفاده از مدل دیوار حائل در سایت به‌اندازه گیری فشار جانبی وارد بر خاک‌های ماسه‌ای و چسبنده پرداخت. مطالعات ماتسو نشان داد که توزیع فشار جانبی وارد بر دیوار حائل غیر خطی است ولی در نظر گرفتن نقطه‌ی اثر نیروی جانبی در ثلث ارتفاع دیوار از کف در جهت اطمینان می‌باشد.

فنگ و ایشی باشی (۱۹۸٦) [12] نشان دادند که در مد حرکتی چرخش حول پاشنه‌ی دیوار، نقطه‌ی اثر نیروی جانبی به‌فاصله‌ی حدود ۰/۲۷۵ ارتفاع دیوار، از پای آن است. آن‌ها هم‌چنین نشان دادند که این مقدار تابع مد حرکت دیوار و خصوصیات خاک خاکریز از جمله دانسیته و مقاومت برشی می‌باشد.

با مطالعه و بررسی بیش‌تر روش‌های تحلیلی موجود محاسبه‌ی فشار جانبی وارد بر دیوارهای حائل، عدم وجود یک روش ساده و دارای پایه‌ی تئوری مشخص برای محاسبه‌ی منطبق بر واقع اندازه و ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی جانبی مشهود می‌باشد. بر این اساس در مقاله‌ی حاضر، با استفاده از معادلات پلاستیسیته‌ی حاکم بر سطوح گسیختگی که به‌نام معادلات کوتر موسوم است با استفاده از روش تعادل حدی به محاسبه‌ی اندازه و ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی جانبی در حالت محرک پرداخته شده است. سپس روند معرفی شده به خاک‌های لایه‌ای بسط داده شده است. روش معرفی شده در این مقاله به محاسبه‌ی منطبق بر واقع اندازه و نقطه‌ی اثر نیروی برآیند وارد بر دیوارهای حائل می‌انجامد و در نتیجه طراحی صحیح دیوار در برابر لغزش و واژگونی میسر می‌گردد.

## تعیین امتداد زاویه‌ی شکست گوه خاک با افق روش مرسوم

نیروی جانبی برآیند و نیروهای شبه استاتیکی لرزه‌ای در جهات قائم و افقی می‌باشد. در روش کولمب با در نظر گرفتن هندسه‌ی مطابق شکل (۱) وزن گوه گسیختگی به‌صورت تابعی از $\alpha$ (زاویه‌ی شکست گوه خاک) در نظر گرفته می‌شود. در این صورت تعیین $\alpha$ جزء معلومات مسأله می‌گردد.




شکل ۱ نیروهای وارد بر گوه خاک در حالت استاتیکی

دو مجهول نیروی عکس العمل خاک وارد بر گوه و نیروی جانبی برآیند وارد بر دیوار با استفاده از دو معادله‌ی تعادل افقی و قائم تعیین می‌گردند. سپس با استفاده از یک روش سعی و خطا و یا صفر قرار دادن مشتق نیرو برآیند نسبت به زاویه‌ی گسیختگی ($dP/d\alpha = 0$)، زاویه‌ی بحرانی گوه گسیختگی تعیین می‌شود و با جای‌گذاری در معادلات تعادل نیروها، نیروی جانبی برآیند بیشینه‌ی وارد بر دیوار حاصل می‌گردد.

## محاسبه‌ی نیروی عکس‌العمل خاک روی سطح گسیختگی

تحلیل سطوح لغزش (خطوط مشخصه) در پلاستیسیته در محیط سه‌بعدی کامل با روش‌های تحلیلی، به ایجاد معادلاتی پیچیده و تقریباً غیر قابل حل می‌انجامد. در حل مسائل، در صورت وقوع شرایط کرنش مسطح، حل معادلات به‌صورت تحلیل دو بعدی ممکن می‌گردد. معادلات حاکم بر ناحیه‌ی پلاستیک با استفاده از شرایط مرزی و حل هم‌زمان معادلات تعادل برگرفته از قانون بقای مومنتم با ارضا معیار گسیختگی موهر- کولمب حاصل می‌گردد. این معادلات اولین بار

توسط مهندس آلمانی اف.کوتر ایجاد و بـه همـین نـام نام‌گذاری گردید [14]. با در نظر گرفتن یک سـطح در محیط پیوسته در حالت گسیختگی، فشار برآیند وارد بر سطح گسیختگی (پلاستیک) با استفاده از این معـادلات قابل محاسـبه مـی‌باشـد. فشـار برآینـد وارد بـر سـطح گسیختگی با فرض خاک به صورت همگن، خشـک و غیرچسبنده به‌صورت رابطه‌ی (۱) بیان می‌گردد [14]:

$$\frac{dP}{ds} - 2P.\tan\varphi\ \frac{d\alpha}{ds} = (\gamma)\sin(\alpha - \varphi) \qquad (۱)$$

$\gamma$: وزن مخصوص خاکریز.

$\varphi$ : زاویه‌ی اصطکاک داخلی خاکریز.

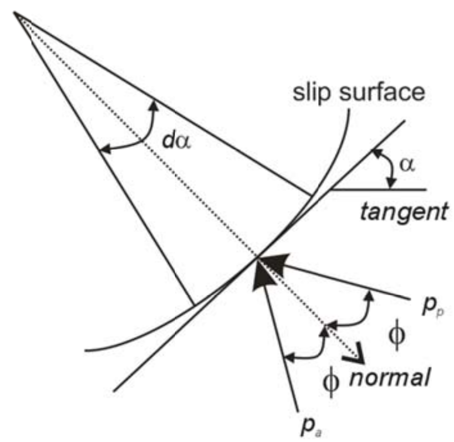
$\alpha$ : زاویه‌ی سطح گسیختگی.

P : فشار روی سطح گسیختگی.

dp: جزء فشار روی سطح گسیختگی.

ds : جزء طول روی سطح گسیختگی.

$d\alpha$ : تغییرات زاویه‌ی مماس بر سطح گسیختگی .




شکل ۲ فشار اعمالی بر سطح گسیختگی خاک در حالت فعال و غیرفعال

در خاک‌های غیرچسبنده و برای سطح گسیختگی صفحه‌ای $\frac{d\alpha}{ds} = 0$ و رابطه‌ی(۱) به رابطـه‌ی (۲) تبـدیل می‌گردد:

$$\frac{dP}{ds} = (\gamma)\sin(\alpha - \varphi) \qquad (۲)$$

با انتگرال‌گیری معادله‌ی فوق، می‌توان داشت:

$$P = \gamma\sin(\alpha - \varphi).s + C_1 \qquad (۳)$$

که در آن s طول قوس از نقطه‌ی B بر روی سطح گسیختگی و $C_1$ ثابت انتگرال‌گیری است (شکل ۱).

معادله‌ی (۳) توزیع فشـار عکـس‌العمـل قسـمت پایدار خاکریز را بـر روی ضـلع AB گـوه گسـیختگی نشان می‌دهد و ثابت $C_1$ در معادلـه‌ی فـوق از شـرایط مرزی محاسبه می‌گردد. به دلیل عـدم وجـود فشـار در سطح آزاد ($p = 0$ در نقطهB) و با توجه به صفر بـودن $s = 0$ در این حالت مقدار $C_1$ برابر صفر خواهد شد.

نیروی عکس‌العمل خاک روی سـطح گسـیختگی AB که در رابطه‌ی (٤) با R نشـان داده شـده اسـت بـا انتگـرال‌گیـری از رابطـه‌ی (۳) محاسـبه مـی‌گـردد. بـا استفاده از معادله‌ی فـوق مقـدار عکـس‌العمـل مطـابق مقدار روبه‌رو در خواهد آمد:

$$R = \int_0^{AB} P\,ds \qquad (٤)$$

با جایگزینی مقدار p از رابطـه‌ی (۳) در رابطـه‌ی (٤) و محاسبه‌ی انتگـرال مقـدار نیـروی عکـس‌العمـل خاک روی سطح گسیختگی، می‌توان داشت:

$$R = \int_0^{AB} P\,ds = \frac{1}{2}AB^2(\gamma)\sin(\alpha - \varphi) \qquad (٥)$$

با توجه به شکل (۱) و روابط هندسی حـاکم بـر گوه گسـیختگی(مثلثABC)، طـول سـطح گسـیختگی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$AB = \frac{H.\sin(\theta + \beta)}{\sin(\alpha - \beta).\sin(\theta)} \qquad (٦)$$

با جایگزینی مقدار AB از رابطه‌ی (٦) در رابطه‌ی (٥) مقـدار نیـروی عکـس‌العمـل خـاک روی سـطح گسیختگی به‌صـورت رابطـه‌ی (۷) حاصـل مـی‌گـردد. مقدار ضریب B برای سـادگی بـا رابطـه‌ی (۸) معرفـی می‌شود:

$$R = \frac{1}{2}\gamma_s H^2 \frac{\sin^2(\theta + \beta)\sin(\alpha - \varphi_s)}{\sin^2(\theta)\sin^2(\alpha - \beta)} \qquad (۷)$$

## محاسبه‌ی زاویه‌ی سطح گسیختگی

برای به‌دست آوردن زاویه‌ی سطح گسیختگی با افق با استفاده از معادلات کوتر، تعادل قائم و افقی نیروها برقرار می‌گردد. در این حالت نیروی جانبی وارد بر دیوار و زاویه‌ی شکست به‌عنوان مجهولات مسأله شناخته می‌شوند (شکل ۱).

از معادله‌ی تعادل افقی نیروها می‌توان داشت:

$$P_a = \frac{R.\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\theta - \delta)} \qquad (۸\text{- الف})$$

از معادله‌ی تعادل قائم نیز می‌توان داشت:

$$P_a = \frac{W - R.\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\theta - \delta)} \qquad (۸\text{- ب})$$

با استفاده از معادله‌ی تعادل افقی با مساوی قرار دادن دو معادله‌ی فوق و با ساده سازی بیش‌تر با روندی به شرح زیر رابطه‌ی (۹- ج) ایجاد می‌گردد.

$$R[\sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi).\tan(-\delta) = \tan(\theta - \delta)\,W$$

(۹-الف)

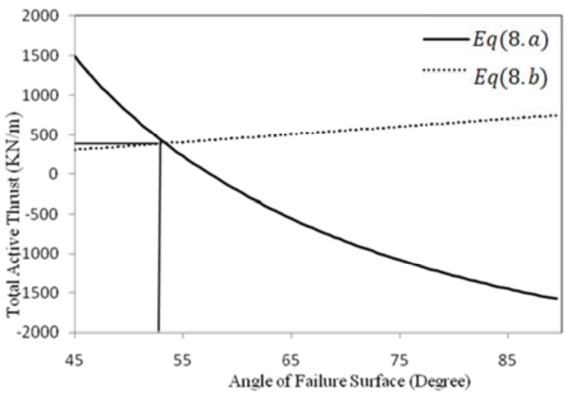
$$(\sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi).\tan(\theta - \delta)) = \frac{1}{R}(\tan(\theta - \delta)\,W)$$

(۹- ب)

$$\sin(\alpha - \delta + \theta - \varphi) = \frac{W}{R}\sin(\theta - \delta)$$

(۹- ج)

باید توجه داشت که در رابطه‌ی (۹-ج) عبارت $\frac{W}{R}$ تابعی از $\alpha$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبه‌ی $\alpha$ ابتدا باید به محاسبه‌ی ضریب $\frac{W}{R}$ پرداخت. مقدار نیروی عکس‌العمل خاک روی سطح گسیختگی (R) قبلاً محاسبه شده است، پس تنها نیاز به محاسبه‌ی وزن گوه خاک است. مقدار وزن گوه خاک (W) از هندسه‌ی نشان داده شده در شکل (۱) به‌دست می‌آید.




شکل۳ حل گرافیکی معادله‌ی (۹- ج) و به‌دست آوردن زاویه‌ی شکست بحرانی

شکل (۳) یکتا بودن جواب به‌دست آمده از معادلات (۹-الف و ب) را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۳) دیده می‌شود، محل برخورد نیروی جانبی حاصل از معادلات تعادل قائم و افقی مشخص‌کننده‌ی زاویه‌ی شکست بحرانی گوه خاک می‌باشد.

مقدار حجم گوه در طول واحد دیوار به‌صورت یک سطح در صفحه حاصل خواهد بود. با توجه به روابط هندسی این سطح به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$W = \gamma.A = \frac{\gamma H^2}{2} \times \frac{\sin(\theta + \beta)\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha - \beta)\sin^2(\theta)}$$

(۱۰)

در این قسمت با استفاده از روابط (۱۱) و (۷) نسبت $\frac{W}{R}$ به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{W}{R} = \frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\beta + \theta)\sin(\alpha - \varphi)} \qquad (۱۱)$$

با ساده‌سازی بیش‌تر و جایگزینی رابطه‌ی (۱۲) در رابطه‌ی (۱۰-ج)، رابطه‌ی (۱۳) به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{\sin(\alpha + \delta - \theta - \varphi)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\beta + \theta)\sin(\alpha - \varphi)}$$

(۱۲)

از حل معادلــه‌ی مـذکور و ساده سازی روابـط به‌دست آمده، زاویه‌ی شکست گوه خاک پشـت دیـوار به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\alpha = \varphi + \arctan(\frac{\tan(\beta-\varphi)+C_1}{C_2}) \quad (۱۳)$$

به‌طوری‌که در رابطه‌ی فوق

$$C_1 = \sqrt{\tan\frac{(\beta-\varphi)(\tan(\beta-\varphi)-\tan(\theta+\varphi))}{(1+\cot(\delta-\theta)\tan(\theta+\varphi))}} \quad (۱٤)$$

$$C_2 = 1+\cot(\delta-\theta)\,(\tan(\beta-\varphi)\tan(\theta+\varphi)) \quad (۱٥)$$

رابطه‌ی به‌دست آمده به روش فوق مشابه رابطه‌ی ضرابی- کاشانی برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شکست گـوه در حـل تحلیلـی روش کولمـب مـی‌باشـد. ضـرابی- کاشانی با استفاده از شرط $\frac{dP}{d\alpha}=0$ فرم خلاصه جـواب برای زاویه‌ی شکست گوه را به‌دست آورده است.

## تخمین نیروی جانبی برآیند با روش تحلیلی

هدف اصلی از به‌دسـت آوردن فـرم خلاصـه‌ی زاویـه شکست خاکریز پشت دیـوار حائـل، معرفـی رابطـه‌ای برای تخمین نیروی جانبی محرک است که به فرم زیـر نشان داده می‌شود:

$$P_a = \frac{1}{2}K_a\gamma H^2 \quad (۱٦)$$

که در آن $K_a$ ضریب فشار جانبی است.

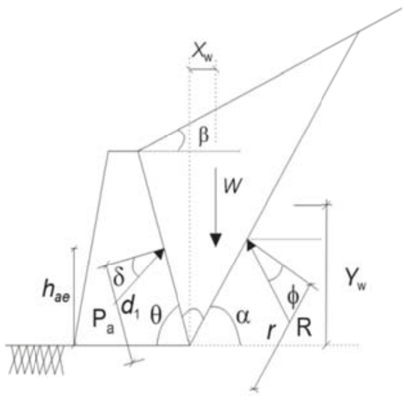
با جایگزینی فرم خلاصه عبارت به‌دست آمـده در قسمت فـوق در رابطـه‌ی نیـرو و سـاده‌سـازی روابـط به‌دست آمده، بـا فـرض دیـوار قـائم و خـاکریز افقـی ضریب محرک استاتیکی نیروی جانبی به‌صـورت زیـر خواهد بود:

$$K_a = \frac{\sin^2(\varphi+\theta)}{\sin^2\theta\sin(\theta-\delta)[1+\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\delta-\theta)\cos(\theta+\beta)}}]^2} \quad (۱۷)$$

مشابه رابطـه‌ی بـه‌دسـت آمـده بـرای محاسـبه‌ی زاویه‌ی شکست، رابطه‌ی به‌دست آمـده بـرای نیـروی برآینـد جـانبی نیـز مشـابه رابطـه‌ی ضـرابی- کاشـانی می‌باشد. به‌همین دلیـل روش حاضـر و روش کولمـب مقدار نیروی جانبی برآیند را به‌صورت یکسان تخمـین می‌زنند.

## محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند

اهمیت محاسـبه‌ی نقطـه‌ی اثـر نیـروی جـانبی وارد بـر دیوارهـای حائـل، در کنتـرل واژگـونی اسـت. در روش کولمب توضیحی در مورد محل نقطه‌ی اثر نیروی جانبی ارائه نشده و تنها با فرض نقطه‌ی اثر در یک‌سوم ارتفاع دیوار به محاسبه‌ی لنگر واژگونی پرداخته شـده اسـت. این فرض باعث ایجاد خطا شده و عـدم تطـابق نتـایج به‌دست آمده با نتایج آزمایشگاهی می‌گردد. بـرای مرتفـع نمودن این چنین خطایی، روش حاضر توانایی محاسبه‌ی محل اثر نیروی جانبی را به‌صـورت تحلیلـی دارا اسـت. برای ایـن منظـور بایـد معـادلات تعـادل لنگـر ناشـی از نیروهای مؤثر بر گوه تنظیم گردد. بازوی نیروهـای مـؤثر در این محاسبه در شکل (٤) نشان داده شده است.




شکل٤ نیروها و بازوهای مربوط برای محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیرو برآیند

همان‌طور که در شکل (٤) دیده مـی‌شـود ارتفـاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند برابر است با:

$$h_{ae} = d_1\times\sin\theta = \frac{(R.\cos\varphi\times r - W.X_w)\sin\theta}{P_{ae}\times\cos\delta} \quad (۱۸)$$

که در آن $X_w$ با استفاده از رسم میانه‌های مثلث حاصل می‌گردد. ضمناً در عبارت فوق r و $Y_w$ نیز به‌ترتیب معرف مکان اثر R و $K_h.W$ از کف دیوار می‌باشند و به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

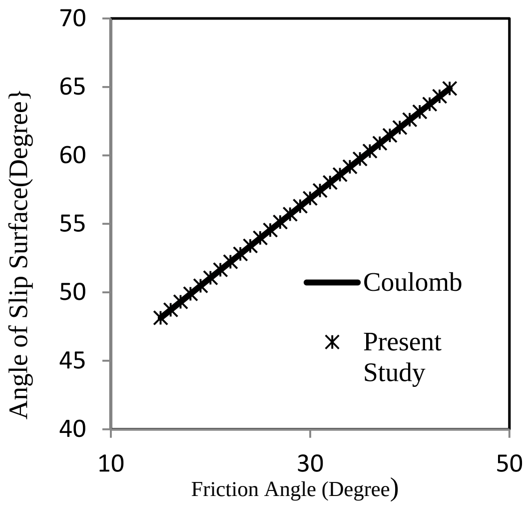
$$r = \frac{1}{3}AB \quad , \quad Y_w = \frac{1}{3}(H + AB\sin\alpha) \qquad (۱۹)$$

$$h_a = \frac{H}{3}\frac{\sin(\delta-\theta)}{\sin(\theta)\sin^2(\alpha-\varphi)\cos\delta}(\cos\alpha\sin(\alpha+\theta) - \cos\varphi\sin(\beta+\theta)) \qquad (۲۰)$$

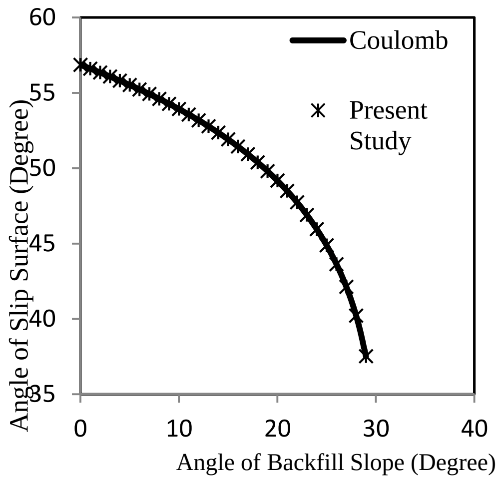
## بحث و مقایسه

### مقایسه‌ی زوایای لغزش گوه گسیختگی و نیروی جانبی برآیند در روش حاضر و روش کولمب

همان‌طور که در روابط تحلیلی ایجاد شده نیز دیده شد روش حاضر و روش کولمب مقادیر زوایای گسیختگی گوه پشت دیوار و نیز نیروی برآیند را به‌صورت برابر تخمین می‌زنند. این برابری در زاویه‌ی گوه گسیختگی و نیروی برآیند جانبی در اشکال (۵) تا (۷) نشان داده شده است.

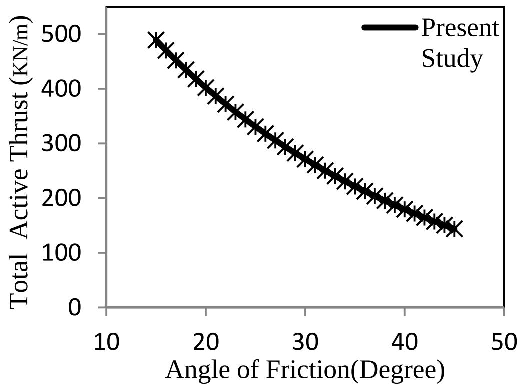



شکل ۵ مقایسه‌ی تغییرات زاویه‌ی لغزش گوه($\alpha$) با تغییر زاویه‌ی اصطکاک داخلی($\varphi$) در روش حاضر و روش کولمب برای $\delta = \frac{\varphi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, K_h = K_v = \beta = 0, H = 10\ m, \gamma = 18\ \frac{kN}{m^3}$




شکل ٦ مقایسه‌ی تغییرات زاویه‌ی لغزش گوه($\alpha$) با تغییر زاویه‌ی شیب گوه($\beta$) در روش حاضر و روش رانکین برای $\varphi = 30^{\circ}, \delta = \frac{\varphi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, K_h = K_v = 0$ $, H = 10\ m, \gamma = 18\ \frac{kN}{m^3}$

شکل (۷) برابری نیروی جانبی برآیند در حالت فعال در روش کولمب و روش حاضر با تغییر زاویه‌ی شکست گوه گسیختگی را نشان می‌دهد.




شکل ۷ مقایسه‌ی تغییرات نیروی جانبی برآیند در حالت فعال در روش کولمب و روش حاضر برای $\delta = \frac{\varphi}{2}, \ \theta = \frac{\pi}{2}, K_v = \beta = 0, \ H = 10\ m, \ \gamma = 18\ \frac{kN}{m^3}$

### مقایسه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند از کف

اهمیت محاسبه‌ی نقطه‌ی اثر نیروی جانبی وارد بر دیوارهای حائل، در کنترل واژگونی است. در کولمب توضیحی در مورد محل نقطه‌ی اثر نیروی جانبی ارائه نشده است و به‌طور فرضی و با در نظر گرفتن توزیع

خطی فشار ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند در یک‌سوم از پایین دیوار در نظر گرفته می‌شود. این نقطه‌ی اثر فرضی است و به‌خصوصیات خاکریز وابسته نمی‌باشد. یکی از مزیت‌های مهم استفاده از روش حاضر توانایی در محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند به‌صورت تحلیلی می‌باشد. جدول (۱) مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده از آزمایش‌های شریف و ایشی باشی (۱۹۸٤) را نشان می‌دهد. همان‌طور در جدول (۱) که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از روش حاضر و نتایج به‌دست آمده از آزمایش‌های شریف و ایشی باشی بر هم منطبق بوده است.

جدول ۱ مقایسه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند از کف برای خاک با مشخصات: $\varphi = 40.9^{\circ}, \delta = 23.5^{\circ}$

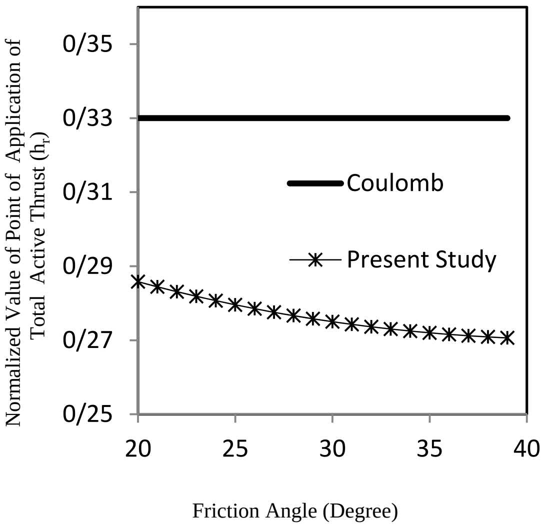
| روش محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر | مقدار |
|---|---|
| روش کولمب | ۰/۳۳H |
| آزمایش شریف و ایشی باشی(۱۹۸۲) | ۰/۲۵H |
| روش حاضر | ۰/۲۵۸H |

جدول (۱) مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده از آزمایش‌های شریف و ایشی باشی (۱۹۸٦) [12] را نشان می‌دهد. همان‌طور در جدول (۱) که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش حاضر و نتایج به‌دست آمده از آزمایش‌های شریف و ایشی باشی بر هم منطبق بوده است.

جدول (۲) مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده از آزمایش‌های ماتسو (۱۹۷۸)[11] به صورت زیر محاسبه می‌شودرا نشان می‌دهد. همان‌طور در جدول (۲) نیز مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از روش حاضر و نتایج به‌دست آمده از آزمایش‌های ماتسو در تطابق نسبی می‌باشد.

جدول ۲ مقایسه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند از کف برای خاک با مشخصات ($\varphi = 50^{\circ}$)

| زاویه‌ی اصطکاک دیوار و خاک | | ٤۰ درجه | ٤۵ درجه |
|---|---|---|---|
| روش محاسبه ارتفاع نقطه‌ی اثر | روش کولمب | ۰/۳۳H | ۰/۳۳H |
| | آزمایش ماتسو (۱۹۷۸) | ۰/۲۱H | ۰/۱۸H |
| | روش حاضر | ۰/۲۲H | ۰/۱۹H |



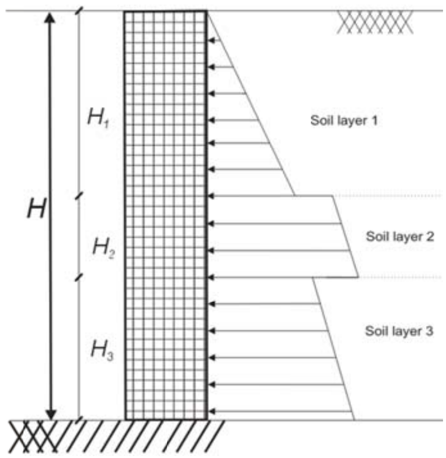

شکل ۸ مقایسه‌ی ارتفاع نرمال نقطه‌ی اثر نیروی برآیند به‌دست آمده از روش حاضر و روش کولمب $\delta = \frac{\varphi}{2}$

فنگ و ایشی باشی (۱۹۸٦) نشان دادند که در مد حرکتی چرخش حول پاشنه دیوار، نقطه‌ی اثر نیروی جانبی به‌فاصله‌ی حدود ۰/۲۷۵ ارتفاع دیوار، از پای آن است. آن‌ها هم‌چنین نشان دادند که این مقدار تابع مد حرکت دیوار و خصوصیات خاک خاکریز از جمله دانسیته و مقاومت برشی می‌باشد. شکل (۸) مقایسه‌ی ارتفاع نرمال نقطه‌ی اثر نیروی برآیند به‌دست آمده از روش حاضر و روش کولمب را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۸) دیده می‌شود ارتفاع به‌دست آمده در بازه‌ی به‌دست آمده توسط فنگ و ایشی باشی می‌باشد. هم‌چنین این مقدار به خصوصیات خاک و دیوار وابسته است و با تغییر زاویه‌ی اصطکاک داخلی خاک تغییر می‌نماید. این وابستگی با نتایج تجربی به‌دست آمده توسط ساگالری (۱۹٦۵) [15] در تطابق می‌باشد.

## محاسبه‌ی اندازه‌ی و ارتفاع نقطه‌ی اثر فشار جانبی در خاک‌های لایه‌ای

***روش مرسوم در محاسبه‌ی فشار در خاک‌های لایه‌ای.*** با بررسی روش‌های تحلیلی محاسبه‌ی فشار جانبی پشت دیوارهای حائل در اکثر روش‌ها فرض

وجود خاکریز به‌صورت یکسان و یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. در نظر گرفتن این فرض به دلیل نوع رسوب‌گذاری و نیز چگونگی ایجاد لایه‌های متفاوت هنگام خاکریزی به‌ویژه از نظر تراکم، قابل توجیه نمی‌باشد.




شکل ۹ توزیع فشار جانبی در نظر گرفته شده در روش‌های مرسوم قبلی

محاسبه‌ی فشار جانبی در خاک‌های لایه از مسائل مهم در طراحی دیوارهای حائل می‌باشد. به دلیل تغییر خواص خاک از لایه‌ای به لایه‌ی دیگر و عدم یکنواختی، محاسبه‌ی فشار جانبی پیچیدگی‌های خاصی برخوردار می‌باشد، هم‌چنین به‌منظور طراحی دیوارهای حائل با خاکریز لایه‌ای، محاسبه‌ی لنگر کل نیروی محرک از اهمیت ویژه برخوردار می‌باشد. در حالت ساده خاک به لایه‌های افقی تقسیم می‌گردد و به محاسبه‌ی فشار جانبی پرداخته می‌شود. در روش مرسوم اندازه‌ی فشار جانبی وارد بر دیوار حائل از روشی مشابه روش رانکین در هر لایه محاسبه می‌گردد. در این روش از توزیع فشار که به‌صورت خطی در نظر گرفته می‌شود به محاسبه‌ی نیروی برآیند و هم‌چنین بازوی آن پرداخته می‌شود.

شکل (۹) چگونگی در نظر گرفتن توزیع فشار در یک خاک لایه‌ای در روش‌های مرسوم قبلی را نشان می‌دهد. نیروی جانبی ناشی از لایه‌ی بالایی به‌صورت وزن بر لایه‌ی پایینی وارد می‌گردد و فشار جانبی به‌صورت خطی به دیوار اعمال می‌گردد. برای مثال در خاک سه لایه‌ای نشان داده شده در شکل (۹) نیروی جانبی برآیند به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P_{ae\ horizontal} = \int_0^{H_1} p\cos\delta_1\,dy + \int_{H_1}^{H_2} p\cos\delta_2\,dy + \int_{H_2}^{H_3} p\cos\delta_3\,dy \quad (۲۱)$$

## تعیین فشار جانبی به روش حاضر

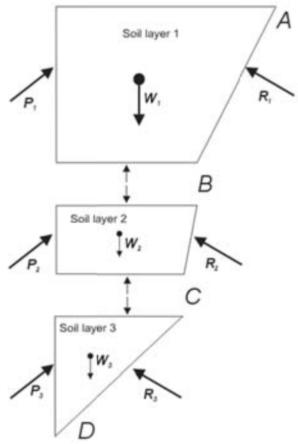
همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در روش حاضر فشار عکس‌العمل خاک بر روی سطح گسیختگی با رابطه‌ی (۱) معرفی می‌گردد که مربوط به یک خاکریز هم‌گن است. برای خاکریزهای لایه‌ای، از وزن مخصوص معادل با در نظر گرفتن سربارها و نیز اثر لایه‌های بالایی به‌صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$\gamma_{eq} = \gamma_n + \frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\beta)}\left(\frac{2q}{H}\right) \quad (۲۲)$$

که در رابطه‌ی فوق:

$$q = \gamma_n + (\gamma_1 \times H_1 + \gamma_2 \times H_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + \gamma_{n-1} \times H_{n-1})$$

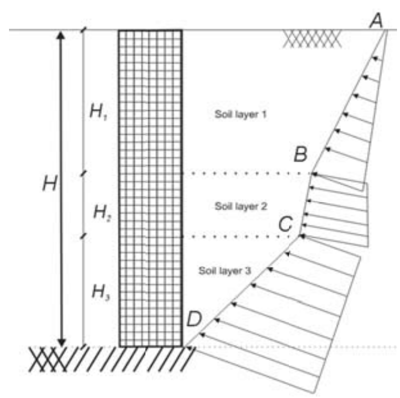
با محاسبه‌ی وزن مخصوص معادل به‌دست آمده در روش فوق و قرار دادن آن در رابطه‌ی (۱)، نیروی وارد بر سطح گسیختگی در هر لایه تعیین و از آنجا نیروی بر آیند کل محاسبه می‌گردد.




شکل ۱۰ نمودار آزاد نیروهای وارد بر لایه‌های خاک

به‌منظور محاسبه‌ی نیروی جانبی وارد بر دیوار لایه‌های خاک به‌صورت مجزا در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱۰) نمودار آزاد نیروهای وارد بر لایه‌های خاک را نشان می‌دهد.

شکل (۱۱) چگونگی توزیع فشار ناشی از عکس‌العمل خاک در یک خاک سه‌لایه‌ای روی سطح گسیختگی را نشان می‌دهد. اهمیت این توزیع فشار در محاسبه‌ی لنگر نیروهای وارد بر دیوار به‌منظور محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی جانبی می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این روش هم مشابه بسیاری از روش‌های تحلیلی از نیروی بین لایه‌ای صرف‌نظر شده است.




شکل ۱۱ توزیع نیروی عکس‌العمل روی سطح گسیختگی در یک خاکریز لایه‌ای

رابطه‌ی (۲۳–الف) نشان دهنده‌ی نیروی بر آیند کل وارد بر گوه گسیختگی می‌باشد. نیروی عکس‌العمل برآیند از جمع سه نیروی اعمال شده بر سطح گسیختگی حاصل می‌گردد.

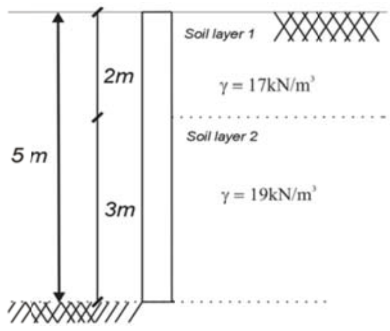
$$R_{total} = \sqrt{R_{horizontal}^2 + R_{vertical}^2} \quad \text{(۲۳– الف)}$$

$$\begin{aligned} R_{horizontal} &= R_1\cos\varphi_1 + R_2\cos\varphi_2 \\ &\quad + R_3\cos\varphi_3 + \cdots + R_n\cos\varphi_n \\ &= \int_A^B p\cos\varphi_1\, ds \\ &\quad + \int_B^C p\cos\varphi_2\, ds \\ &\quad + \int_C^D p\cos\varphi_3\, ds + \cdots \end{aligned} \quad \text{(۲۳–ب)}$$

$$\begin{aligned} R_{vertical} &= R_1\sin\varphi_1 + R_2\sin\varphi_2 \\ &\quad + R_3\sin\varphi_3 + \cdots + R_n\sin\varphi_n \\ &= \int_A^B p\sin\varphi_1\, ds \\ &\quad + \int_B^C p\sin\varphi_2\, ds \\ &\quad + \int_C^D p\sin\varphi_3\, ds + \cdots \end{aligned} \quad \text{(۲۳–ج)}$$

## مثال کاربردی

به‌منظور روشن شدن چگونگی استفاده از روش حاضر و نیز مقایسه‌ی اختلاف مقادیر محاسبه شده در این روش با سایر روش‌های مرسوم، نیروی جانبی و نقطه‌ی اثر آن در یک خاکریز دولایه‌ای مقایسه می‌شوند.




شکل ۱۲ مشخصات لایه‌های خاک پشت دیوار

لازم به ذکر است که روش فوق کلی است و قابل بسط به خاکریز با هر تعداد لایه می‌باشد. شکل (۱۲) مشخصات لایه‌های خاک مورد بررسی را نشان می‌دهد.

جـدول (۳) نیـروی جـانبی افقـی وارد از طـرف لایه‌های خاک، نیروی جانبی کل و ارتفـاع نقطـه‌ی اثـر نیروی جانبی کل به‌دست آمده از روش حاضر و روش کولمب در دیوارهایی با خاکریزهای گوناگون را نشـان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شـود مقـادیر ارتفـاع نقطه‌ی اثر نیروی برآیند به‌دست آمـده از روش حاضـر کم‌تر از مقادیر مشابه با در نظـر گـرفتن توزیـع خطـی برای فشار جانبی پشت دیوار می‌باشد.

جدول (٤) مقادیر لنگـر ناشـی از نیـروی جـانبی برآیند پشت دیوار در روش حاضر و روش کولمـب را با در نظر گرفتن توزیع خطی فشار در خاک‌های لایه‌ای نشان می‌دهد. همـان‌طـور کـه دیـده مـی‌شـود مقـادیر به‌دست آمده از روش کولمب بیش‌تر از مقادیر به‌دست آمده از روش حاضر می‌باشد و اختلاف مقادیر محاسبه شده از روش‌های فوق در حدود ۲۰ درصد می باشد.

## نتیجه‌گیری

این مقاله به ارائه‌ی یک راه حل نظری بر پایـه‌ی روش تعادل حدی به‌منظور محاسبه‌ی اندازه و ارتفاع نقطـه‌ی اثر فشار جانبی وارد از طـرف خـاک در پشـت دیـوار حائـل خاکریزهـای دارای لایـه‌بنـدی در حالـت فعـال پرداخته است. برای این منظور، از روشی اسـتفاده شـد کـه بـا فـرض خطـی بـودن سـطح لغـزش و بـدون بیشینه‌سازی به ارائه‌ی فرم خلاصه جواب برای زاویه‌ی شکست گوه خاک و نیز نیروی جانبی برآینـد وارد بـر دیوار پرداخته شد. نتایج حاصل از روش مقالـه حاضـر در تطابق کامل با کولمب می‌باشد.

نکته‌ی اساسی در روش حاضر تخمین منطبق بـر واقـع ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی جانبی وارد بر دیوار می‌باشـد، که این امر به محاسبه‌ی صحیح لنگـر وارد بـر دیـوار و در نتیجـه طراحـی مطمـئن دیوارهـای حائـل منجـر می‌گردد. هم‌چنین نقطه‌ی اثر بـه‌دسـت آمـده در روش فوق وابسته به خصوصـیات خـاکریز مـی‌باشـد کـه در تطبیق با آزمایش‌های تجربی برای مد حرکتی چرخش حول پاشنه می‌باشد.

جدول ۳ مقایسه‌ی نیروی جانبی افقی لایه‌ها، کل و ارتفاع نقطه‌ی اثر نیروی جانبی

$$H = 5m, H_1 = 3m, H_2 = 2, \gamma_1 = 17\frac{kN}{m^3}, \gamma_2 = 19\frac{kN}{m^3}\delta = \frac{\varphi}{2}$$

| Case Number | $\varphi_1$ (درجه) | $\varphi_2$ (درجه) | $P_{ae(Total)}$(kN/m) | $P_{ae1}$(kN/m) | $P_{ae2}$(kN/m) | Hr(Coulomb) | $H_r$ (Present Method) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ۳۰ | ۳۵ | 55.13 | 22.27 | 32.86 | 0.35 | 0.29 |
| 2 | ۳۵ | ۳۰ | 58.71 | 17.95 | 40.76 | 0.31 | 0.25 |
| 3 | ۳۵ | ۳۷ | 48.02 | 17.96 | 30.07 | 0.34 | 0.28 |
| 4 | ۳۷ | ۳۵ | 49.29 | 16.4 | 32.8 | 0.32 | 0.26 |

جدول ٤ مقایسه‌ی لنگر ناشی از نیروی برآیند در روش حاضر و روش کولمب

$$H = 5m, H_1 = 3m, H_2 = 2, \gamma_1 = 17\frac{kN}{m^3}, \gamma_2 = 19\frac{kN}{m^3}, \varphi_1 = 30^{\circ}, \varphi_2 = 37^{\circ}, \delta = \frac{\varphi}{2}$$

| Method | Case Number | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Coulomb (Linear Distribution) | 19.29 | 17.9 | 16.33 | 15.77 |
| Present Method | 16 | 14.68 | 13.44 | 12.81 |
| Derivation% | 0.17 | 0.18 | 17.69 | 18.7 |

نتایج به‌دست آمده به‌وسیله‌ی روش معرفی شـده در این مقاله نشان می‌دهد مقدار نیروی برآینـد جـانبی دقیقاً برابر با مقدار به‌دست آمده توسط روش کولمـب می‌باشد. هم‌چنین در حالت استاتیکی و بـا فـرض مـد حرکت چرخش حول پاشنه برای دیـوار، مقـادیر لنگـر به‌دسـت آمـده از روش کولمـب در جهـت اطمینـان و بـرای طراحـی دیـوارهـای حائـل مناسـب مـی‌باشـد.

## مراجع


1. Caquot, A., Kerisel, F, "Tables for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure and Bearing Capacity of Foundations", Gauthier-Villars, Paris, ( 1948)
2. Dubrova, G. A., "Interaction of soil and structures", Izd. Rechnoy Transport, Moscow, [Mentioned in Harr], (2007).
3. Sokolovskii, V.V, Statics of Granular Media. Pergamon Press, New York, (1965)
4. Zarrabi-Kashani, K., "Sliding of gravity retaining wall during earthquake: Considering vertical acceleration and changing inclination of failure surface", MS thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, (1979).
5. Greco V. R., "Active earth thrust on cantilever walls in general conditions", Soils and Foundations, Vol.39, NO.6, 65-78. (1999)
6. Janssen, H. A., Versucheubergetreidedruck in silozellen. Zeitschrift, Verein Deutscher Ingenieure 39, 1045–1049, (partial English translation in Proc. Inst. Civ. Engrs, (1986).
7. Spangler, M. G. and Handy, R. L., "Soil engineering", NewYork; Harper & Row, (1984).
8. Wang, Y.Z., "Distribution of earth pressure on a retaining wall", Ge´otechnique, Vol. 50, No. 1, pp. 83–88, (2000).
9. Shahgholi, M., Fakher, A., Jones, C. J. F. P., "Horizontal slice method of analysis", Geotechnique 51 (10), pp.881–885, (2001).
10. Ahmadabadi, M. and Ghanbari, A., "New procedure for active earth pressure calculation in retaining walls with reinforced cohesive-frictional backfill", Geotextiles and Geomembranes, No. 27, pp. 456-463, (2009).
11. Matsuo, M., Kenmochi, S., Yagi, H., "Experimental study on earthpressure of retaining wall by field test", Soil Mechanics and Foundation Eng, Vol. 18, No. 3, pp. 27-41, (1978).
12. Sherif, M. A., Ishibashi, I., and Lee, C. D., "Earth pressure against rigid retaining walls", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 108(GT5), pp. 679-693, (1982).
13. Sherif, M. A., and Fang, Y. S., "Ka and Ko behind rotating and non-yielding walls", *Journal of Geotechnical Engineering,* ASCE, Vol. 110, No. 1, 41-56, (1984).
14. Kötter, F., "Die Bestimmung des Drucks an gekru¨mmten Gleitfla¨chen, eine Aufgabeaus der Lehrevom Erddruck", Sitzungsberichte der Akademieder Wissenschaften, Berlin, pp. 229–233, (1903).
15. Tsagareli, Z. V, "Experimental investigation of the pressure of a loose medium on retaining walls with a vertical back faceand horizontal backfill surface", *J. Soil Mech.* Found. Eng, ASCE 91, No. 4, pp. 197–200, (1965).